ANNEE 2001

CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ECOLE DE L'AIR

CONCOURS MP

PREMIÈRE ÉPREUVE
DE
MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 13

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

T.S.V.P.

L'objet de ce problème est l'étude d'un opérateur en lien avec une équation fonctionnelle appelée : intégrale de Fredholm de première espèce.
Dans une première partie, on étudiera les propriétés générales de cet opérateur, dans la deuxième partie une certaine classe de ces opérateurs et enfin, dans la troisième partie, un cas particulier.

Dans tout ce problème , E désigne l'espace des fonctions continues de $[0,\pi]$ *dans* $\mathbb{R}$.

Pour f élément de E, on note $N_\infty(f) = \sup_{t\in[0,\pi]} |f(t)|$ *et* $N_2(f) = \sqrt{\int_0^\pi f^2(t)\,dt}$.

On considère aussi une fonction K *continue sur* $[0,\pi]^2$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *non identiquement nulle et telle que* $\forall (x,y) \in [0,\pi]^2$, $K(x,y)=K(y,x)$.
On rappelle le symbole de Kronëcker δ_{ij} *tel que* $\delta_{ij}=1$ *si* $i=j$ *et* $\delta_{ij}=0$ *sinon.*

Préliminaire

Les résultats de ce préliminaire ne serviront que dans la troisième partie de ce problème.

- 1) Montrer que l'équation *tan(x)* = *x* d'inconnue réelle *x* a une infinité de solutions réelles positives qui sont les termes d'une suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\pi \le \omega_n \le n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

  En déduire l'ensemble des solutions réelles de cette équation.

Partie 1

- 2) Montrer que N_∞ et N_2 définissent bien des normes sur l'espace *E* et que N_2 est la norme associée à un produit scalaire.
- 3) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

A tout f élément de E, on associe la fonction g définie par :

$$\forall x \in [0,\pi],\ g(x) = \int_0^\pi K(x,y)\,f(y)\,dy.$$

- 4) Montrer que *g* existe bien, est continue sur $[0,\pi]$ et que l'application $\mathfrak{I}$ définie par : $\mathfrak{I}\begin{cases} E \to E \\ f \to g \end{cases}$ est linéaire.
- 5) $\mathfrak{I}$ est-elle continue quand *E* est muni de la norme N_∞ ?
- 6) $\mathfrak{I}$ est-elle continue quand *E* est muni de la norme N_2 ?
- 7) Montrer que $\forall (f,g)\in E^2$, $(\ \mathfrak{I}(f)\ /\ g\ ) = (\ f\ /\ \mathfrak{I}(g)\ )$; (où $(\ /\ )$ désigne le produit scalaire associé à la norme N_2).

  Que peut-on en déduire concernant les sous-espaces propres éventuels associés à l'opérateur $\mathfrak{I}$?

- 8) Etablir l'existence de $\Omega = \left(\max_{x\in[0,\pi]} \int_0^\pi |K(x,y)|\, dy \right)^{-1}$.

On note $\mathfrak{I}^0 = Id_E$ *et pour tout entier naturel n,* $\mathfrak{I}^{n+1} = \mathfrak{I}^n \circ \mathfrak{I}$.

- 9) On muni E de la norme N_∞. Soit $\lambda \in]-\Omega,\Omega[$ fixé et f élément de E fixé.

Montrer que la série de fonction de terme général $\lambda^k \mathfrak{I}^k(f)$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ et que la somme de cette série est une fonction continue sur $[0,\pi]$.

- 10) Montrer que, pour tout réel $\lambda \in]-\Omega,\Omega[$ fixé et pour tout élément h de E, l'équation $f - \lambda\mathfrak{I}(f) = h$ d'inconnue f admet une unique solution dans l'espace (E, N_∞).

- 11) Nous voulons montrer maintenant que, si $\mathfrak{I}$ possède une valeur propre non nulle, alors le sous-espace propre associé à cette valeur propre est nécessairement de dimension finie.

Pour cela, considérons une valeur propre non nulle λ de $\mathfrak{I}$ et supposons que la dimension du sous espace propre associé n'est pas finie.

Montrer alors l'existence d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\ker(\mathfrak{I} - \lambda Id_E)$ telle que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \int_0^\pi f_n(t) f_m(t) dt = \delta_{m,n}.$$

En déduire que $\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,\pi],\ |\lambda|^2 \sum_{k=0}^{N} |f_k(x)|^2 \le \int_0^\pi |K(x,y)|^2\, dy$, puis établir une contradiction et conclure.

Partie 2

Dans cette partie, on suppose de plus qu'il existe une fonction u élément de l'espace $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 2π *périodique, paire et de classe* C^1 *par morceaux sur* $\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\forall (x,y) \in [0,\pi]^2,\ K(x,y) = u(x-y) - u(x+y).$$

- 12) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels telle que :

$$\forall (x,y) \in [0,\pi]^2,\ K(x,y) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx)\sin(ny).$$

- 13) En déduire alors que :

$$\forall x \in [0,\pi],\ \forall f \in E,\ \mathfrak{I}(f)(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx) \int_0^\pi f(y)\sin(ny)\, dy.$$

- 14) Déterminer alors les valeurs propres non nulles de $\mathfrak{I}$.

On suppose en plus, et ce jusqu'à la fin de cette partie 2, que u est définie par :

$$\forall x \in [0,\pi],\ u(x) = x(x-2\pi).$$

- 15) Dessiner le graphe de la fonction u.

Montrer que :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,\pi],\ \Im(f)(x) = 4(\pi - x)\int_0^x y f(y)\,dy + 4x\int_x^\pi (\pi - y)\, f(y)\,dy.$$

Calculer effectivement les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'opérateur $\Im$ associé à u.

- 16) Pour un réel λ et une fonction h élément de $C^2([0,\pi],\mathbb{R})$ donnés, montrer que :

$$(f - \lambda\Im(f) = h) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = h(0) \\ f(\pi) = h(\pi) \\ f'' + 4\pi\lambda f = h'' \end{cases}$$

puis déterminer une expression de f.

Partie 3

Nous allons étudier un cas particulier d'équation intégrale de Fredholm.
On notera E" le sous-espace vectoriel des fonctions de E qui sont de classe C^2 et vérifient en outre les relations $f(0) = 0$ et $f'(\pi) = \frac{1}{\pi} f(\pi)$.

On définit la fonction K *par :*

$$\forall (x,y) \in [0,\pi]^2,\ x \le y \Rightarrow K(x,y) = e^{\frac{y}{\pi}}\, sh(\frac{x}{\pi}),\ \text{et}\ y \le x \Rightarrow K(x,y) = e^{\frac{x}{\pi}}\, sh(\frac{y}{\pi}).$$

- 17) Vérifier que K est bien continue sur $[0,\pi]^2$ et que :

$$\forall (x,y) \in [0,\pi]^2,\ K(x,y) = K(y,x).$$

- 18) Montrer que pour toute fonction f de E, $\Im(f)$ est élément de $E"$ et déterminer une relation entre f, $\Im(f)$ et $\Im(f)"$.

- 19) La restriction de $\Im$ à E" est-elle un automorphisme ?

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de cette restriction.